

P3

ALJABAR BOOLE

Hindiantoro

hindiantoro.wordpress.com

hindiantoro.uksw@gmail.com

08585477772

Prinsip Dasar Aljabar Boole

- ◉ Aljabar boole → Teknik matematika untuk menyelesaikan masalah-masalah logika.
- ◉ Aljabar boole mendasari operasi-operasi aritmatika yang dilakukan oleh komputer dan juga bermanfaat menganalisis dan mendesain rangkaian yang menjadi dasar bagi pembentukan komputer sendiri.

Definisi-Definisi Dasar Aljabar Boole

1. Invers, operasi logika yang mengubah logika 1 menjadi 0 atau sebaliknya. Invers dari variabel A, adalah \bar{A} (dibaca : bukan A, A-Invers, A-not, A-bar)
2. AND, Operasi AND antara variabel A dan B ditulis $A \cdot B$ (dibaca: A and B). $(A \cdot B)$ bernilai 1, hanya jika A dan B bernilai 1. Tanda (\cdot) kadang tidak ditulis : AB
3. OR, Operasi OR antara 2 variabel A dan B ditulis $A + B$ (dibaca: A or B). $(A + B)$ bernilai 0, hanya jika A dan B bernilai 0
4. XOR, Operasi XOR antara 2 variabel A dan B ditulis $A \oplus B$ (dibaca: A X-OR B). $(A \oplus B)$ bernilai 0, hanya jika A dan B bernilai sama.

Cont.

● Tabel Kebenaran

A	\bar{A}
0	1
1	0

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

● NOT dapat digunakan untuk menyajikan fungsi pembalik (ingkaran).

➤ Sebagai contoh, jika keluaran dari gerbang AND diingkar akan menghasilkan fungsi

$$\text{NAND} : F = \overline{AB}$$

➤ NOR : $F = \overline{A + B}$

Cont.

● Tabel Fungsi Boole

Fungsi	Notasi Boole
NOT	\bar{A}
AND	$A \cdot B$ atau AB
OR	$A + B$
NAND	\overline{AB}
NOR	$\overline{A + B}$
X-OR	$A \oplus B$
X-NOR	$\overline{A \oplus B}$

Ponsulat Boole

- ⊙ T1 : Operasi 0 dan 1 (Operation with 0 and 1)
 - a. $0 + A = A$
 - b. $1 + A = 1$
 - c. $0 \cdot A = 0$
 - d. $1 \cdot A = A$
- ⊙ T2 : Hukum Identitas (Idempotent Laws)
 - a. $A \cdot A = A$
 - b. $A + A = A$
- ⊙ T3 : Hukum Negasi (Involution Laws)
 - a. $\overline{(\overline{A})} = A$
 - b. $\overline{(\overline{\overline{A}})} = A$
- ⊙ T4 : Hukum Komplemen (Laws of Complementarity)
 - a. $\overline{A} + A = 1$
 - b. $\overline{A} \cdot A = 0$

Cont.

- ◉ T5 : Hukum Komutatif (Commutative Laws)
 - a. $A + B = B + A$
 - b. $A \cdot B = B \cdot A$
- ◉ T6 : Hukum Asosiatif (Associative Laws)
 - a. $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
 - b. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$
- ◉ T7 : Hukum Distributif (Distributive Laws)
 - a. $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
 - b. $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
- ◉ T8 : Hukum Redundansi (Redundant Laws)
 - a. $A + A \cdot B = A$
 - b. $A \cdot (A + B) = A$

Cont.

- ⊙ T9 : Teorema Penyederhanaan (Simplification Theorems)
 - a. $A + (\bar{A} \cdot B) = A + B$
 - b. $A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$
- ⊙ T10 : Hukum De Morgan (DeMorgan's Laws)
 - a. $\overline{(A + B)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
 - b. $\overline{(A \cdot B)} = \bar{A} + \bar{B}$
- ⊙ T11 : Teorema Perkalian dan Pemfaktoran (Theorem for Multiplying Out and Factoring)
 - a. $(A + B)(\bar{A} + C) = AC + \bar{A}B$
 - b. $AB + \bar{A}C = (A + C)(\bar{A} + B)$
- ⊙ T12 : Teorema Konsensus
 - a. $AB + BC + \bar{A}C = AB + \bar{A}C$
 - b. $(A + B)(B + C)(\bar{A} + C) = (A + B)(\bar{A} + C)$

Tabel Kebenaran

- Adalah salah satu cara untuk menguji kebenaran dari teorema aljabar boole.
- Tabel kebenaran berisi semua kondisi/kombinasi variabel dan hasil output untuk setiap kombinasi input.

Cont - Contoh

- Buktikan : $A + A \cdot B = A$ (Hukum Redundansi)

A	B	$A \cdot B$	$A + A \cdot B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

- Buktikan teorema De Morgan : $\overline{(A \cdot B)} = \bar{A} + \bar{B}$

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A} + \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

- Buktikan T11 : $(A + B)(\bar{A} + C) = AC + \bar{A}B$

A	B	C	\bar{A}	$(A + B)$	$(\bar{A} + C)$	$(A + B)(\bar{A} + C)$	AC	$\bar{A}B$	$AC + \bar{A}B$
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1

Latihan 1

Buktikan dengan tabel kebenaran bahwa :

a. $0 + A = A$

b. $A \cdot A = A$

c. $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

d. $A + \bar{A} \cdot B = A + B$

e. $AB + BC + \bar{A}C = AB + \bar{A}C$

f. $XY + \bar{X}Y + \bar{X}\bar{Y} = \bar{X} + Y$

g. $ABC + AC + BC = A + B + C$

h. $ABD + \bar{A}\bar{B}D + A\bar{B}\bar{D} = A(\bar{B}\bar{D} + BD)$

Manipulasi dan Penyederhanaan Fungsi Boole

- ⊙ Tujuan : Pertimbangan Ekonomis (Biaya lebih murah)
- ⊙ Contoh :

1. Sederhanakan : $A + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

$$= A \cdot 1 + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$= A \cdot (1 + \bar{B}) + \bar{A} \cdot B$$

$$= A \cdot 1 + \bar{A} \cdot B$$

$$= A + \bar{A} \cdot B \rightarrow (\text{T9 : Penyederhanaan})$$

$$= A + B$$

2. Sederhanakan : $\bar{A} \cdot B + A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

$$\blacktriangleright = \bar{A} \cdot B + A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B \rightarrow (\text{T2 : } A + A = A)$$

$$\blacktriangleright = B \cdot (\bar{A} + A) + \bar{A} \cdot (\bar{B} + B)$$

$$\blacktriangleright = B \cdot 1 + \bar{A} \cdot 1$$

$$\blacktriangleright = B + \bar{A}$$

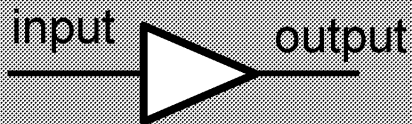
LATIHAN - 2

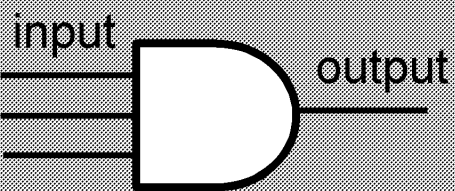
1. Sederhanakan : $A \cdot (A \cdot B + C)$
2. Sederhanakan : $A B C + C A B + A B + A$
3. Sederhanakan : $((\overline{x + y}) + (\overline{x + z})) \cdot z$
4. Sederhanakan: $X Y + \overline{X} Y \overline{Z} + Y Z$
5. Sederhanakan: $X (X + Y) + (X + Y)(X + \overline{Y})$

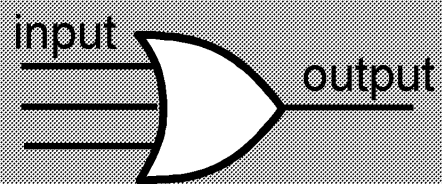
Gerbang Logika

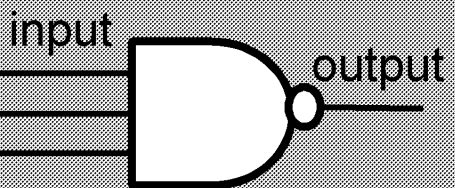
- ◉ Adalah piranti 2 keadaan (2-states), yang mempunyai 2 states output :
 - 0 (rendah) biasanya 0V
 - 1 (tinggi) biasanya +5V
- ◉ Komputer digital pada dasarnya tersusun dari rangkaian gerbang-gerbang logika yang sudah diintegrasikan (IC)
- ◉ Bagian-bagian yang membentuk IC terdiri dari transistor-transistor, dioda-dioda dan komponen zat padat lainnya

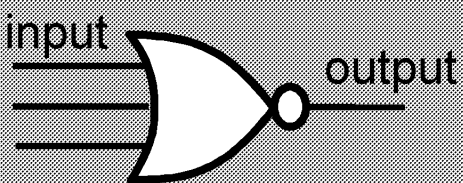
Gerbang Logika Dasar

● NOT : 

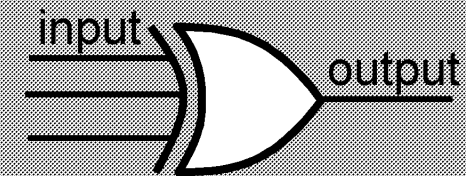
● AND : 

● OR : 

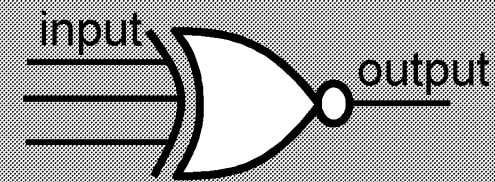
● NAND : 

● NOR : 

● EXOR :



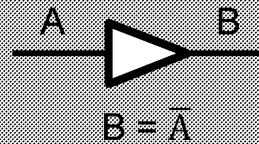
● EX-NOR :



Tabel Kebenaran Gerbang Logika

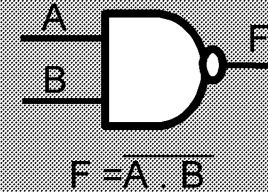
● NOT

A	B
0	1
1	0



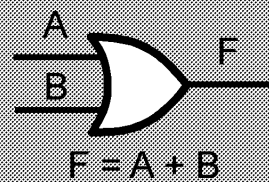
● NAND

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



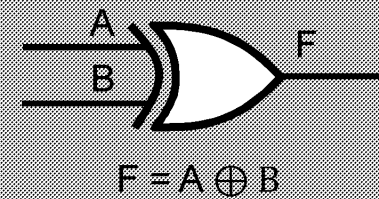
● OR

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



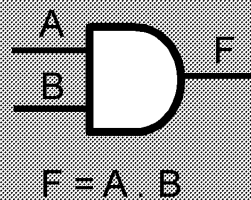
● X-OR

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



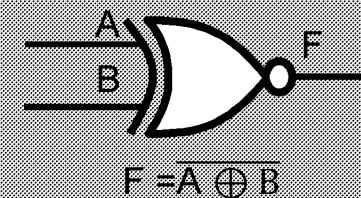
● AND

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



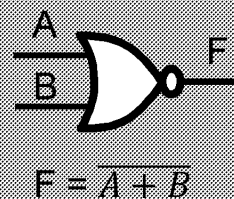
● X-NOR

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



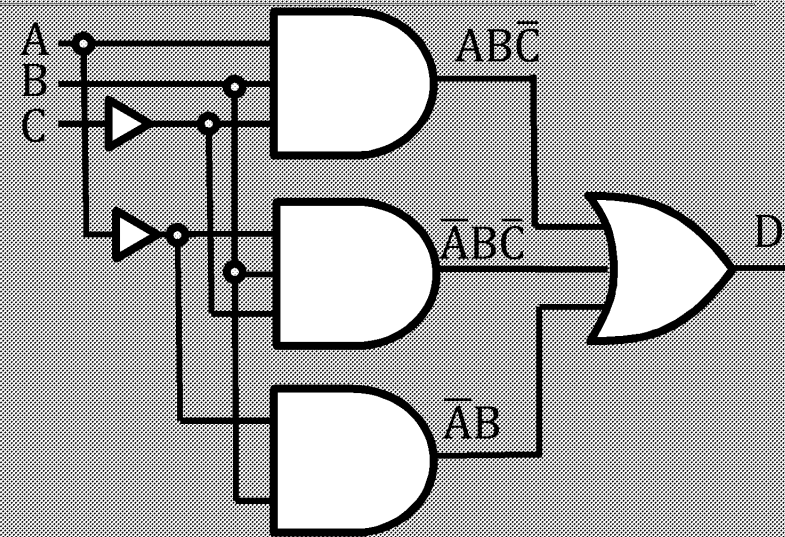
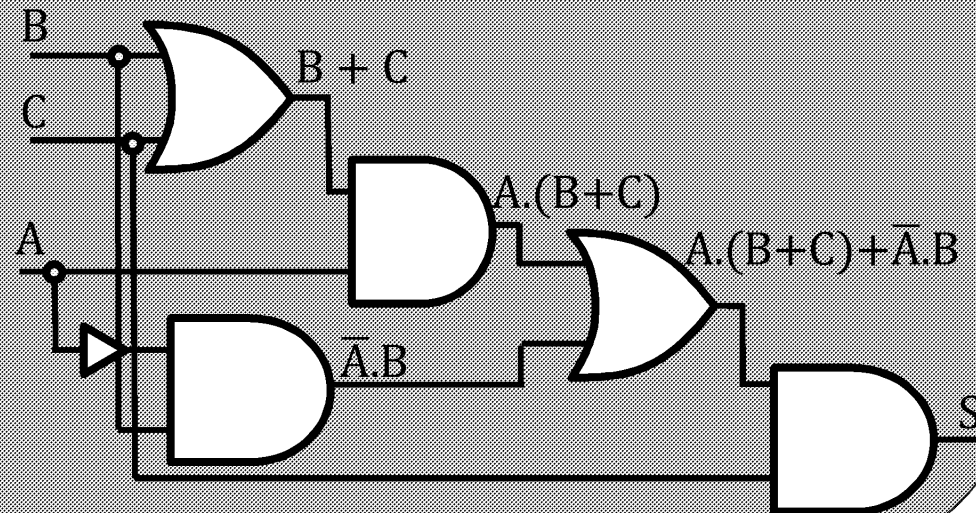
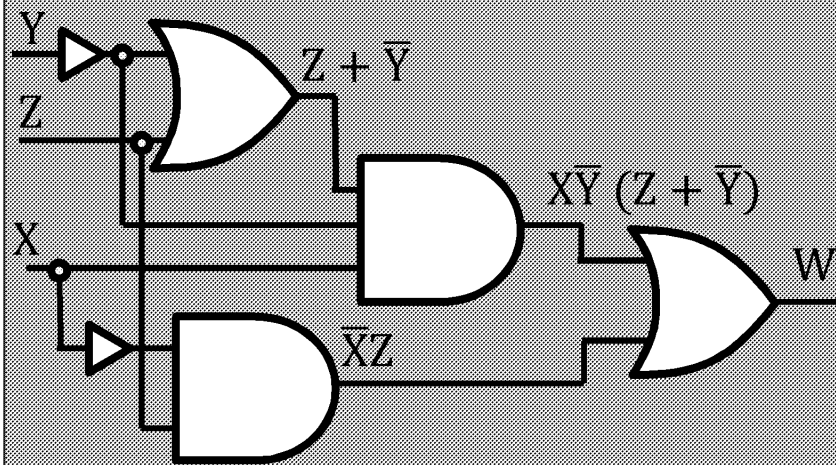
● NOR

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Merancang Diagram Nalar dari Fungsi Boole

- Yaitu : Mengimplementasikan persamaan fungsi logika ke dalam untai elektronika logika.
- Contoh :
 - $D = ABC\bar{C} + \bar{A}BC\bar{C} + \bar{A}B$
 - $W = X\bar{Y}(Z + \bar{Y}) + \bar{X}Z$
 - $S = (A \cdot (B + C) + \bar{A} \cdot B) \cdot C$



Latihan 3

Sederhanakan persamaan boole berikut ini dan gambarkan dalam bentuk gerbang logika :

1. $Y = \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \bar{A} B + \bar{B} \bar{C}$

2. $Y = A \cdot (B + \bar{C}) + A \cdot B \cdot (\bar{C} + \bar{B} \cdot (A + \bar{C})) + A \cdot B \cdot \bar{C}$

SOP dan POS

- ◎ SOP (Sum of Product) : Yang dilihat adalah keluaran bernilai "1",
Jika nilai variable = "1", maka ditulis nama variable, jika nilai
variable = "0", maka di atas variable diberikan bar.
 - Contoh : $A B C = 0 0 0$, ditulis : $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$
 $A B C = 1 1 1$, ditulis : $A B C$
- ◎ POS (Product of Sum) : Yang dilihat adalah keluaran bernilai "0",
Jika nilai variable = "1", maka di atas variable diberikan bar, jika
nilai variable = "0", maka ditulis variable saja.
 - Contoh : $A B C = 0 0 0$, ditulis : $(A + B + C)$
 $A B C = 1 1 1$, ditulis : $(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$

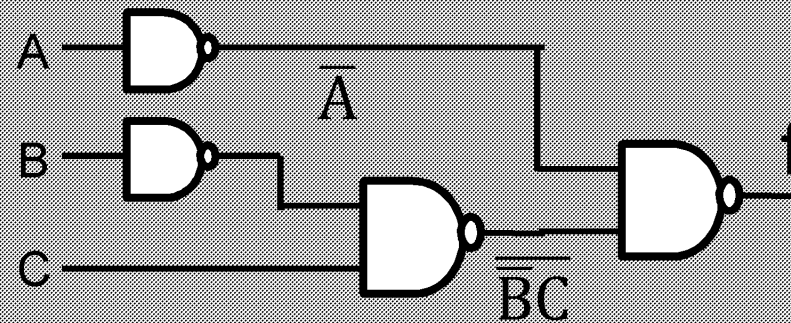
Merancang Gerbang Logika dengan Gerbang "NAND" saja

1. Sederhanakan fungsi Booleanya
2. Manipulasikan agar fungsi booleanya dalam bentuk SOP (Sum of Product) = OR
3. Kenakanlah negasi dua (2) kali pada fungsi boole
4. Terapkan hukum De Morgan pada negasi bagian dalam

Contoh :

Rancanglah dengan Gerbang "Nand Only"

$$\begin{aligned} f(A,B,C) &= A + \overline{B} C \\ &= \overline{\overline{A + \overline{B} C}} \\ &= \overline{\overline{A} \cdot \overline{\overline{B} C}} \end{aligned}$$



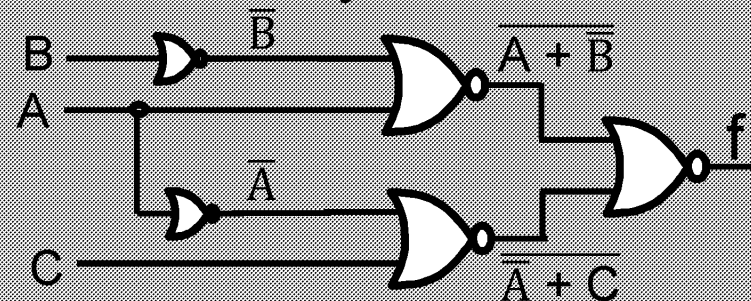
Merancang Gerbang Logika dengan Gerbang "NOR" saja

1. Sederhanakan fungsi Booleanya
2. Manipulasikan agar fungsi booleanya dalam bentuk POS (Product of Sum) = AND
3. Kenakanlah negasi dua (2) kali pada fungsi boole
4. Terapkan hukum De Morgan pada negasi bagian dalam

Contoh :

Rancanglah dengan Gerbang "NOR Only"

$$\begin{aligned} f(A,B,C) &= (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + C) \\ &= \overline{\overline{(A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + C)}} \\ &= \overline{(A + \bar{B}) + (\bar{A} + C)} \end{aligned}$$



Latihan 4

1. Tentukan output $Y = 1$ (SOP: Nand Only) dan Output $Y = 0$ (POS: Nor Only) dari tabel kebenaran A dan B
2. Dari tabel kebenaran C rancanglah diagram nalarnya dengan "Nand Only" dan "Nor Only"
3. Pada suatu jalan yang sedang diperbaiki, mobil yang melewati harus satu persatu. Tidak diperkenankan lewat 2 kendaraan sekaligus atau lebih. Sinyal akan menyala jika kendaraan melebihi satu (ketentuan tersebut dilanggar).
 - Buatlah tabel kebenaran dengan contoh 3 kendaraan (3 variabel)
 - Persamaan dan rangkaian logikanya dilihat dari output "1"

A

Desimal	A	B	C	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

B

Desimal	A	B	Y
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1

C

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Cont

4. Jika nilai suatu bil. biner 4 bit habis dibagi 4, maka akan memberikan output 1. Buatlah:

- Tabel kebenaran
- Persamaan dari output 0
- Gerbang logika

5. Rancanglah dengan gerbang "Nand Only"

a. $f(A,B,C) = A \cdot (\bar{B} + C) + \bar{A} B$

b. $f(A,B,C) = A B (B + \bar{C}) + \bar{A} (\bar{B} + C) + A \bar{B} \bar{C} + C (A + B C)$

6. Rancanglah dengan gerbang "Nor Only"

a. $f(A,B,C) = (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B) \cdot (B + \bar{C})$

b. $f(A,B,C) = (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + C)$

Maxterm ($\prod M$) dan Minterm ($\sum m$)

- Pada dasarnya adalah daftar nomor baris (nilai desimal) yang outputnya berharga "0" untuk maxterm (POS) dan berharga "1" untuk minterm (SOP).
- Tabel Maxterm dan Minterm

Desimal	A	B	C	Minterm (SOP) $\sum m$	Maxterm (POS) $\prod M$
0	0	0	0	$\bar{A} \bar{B} \bar{C} = m_0$	$A + B + C = M_0$
1	0	0	1	$\bar{A} \bar{B} C = m_1$	$A + B + \bar{C} = M_1$
2	0	1	0	$\bar{A} B \bar{C} = m_2$	$A + \bar{B} + C = M_2$
3	0	1	1	$\bar{A} B C = m_3$	$A + \bar{B} + \bar{C} = M_3$
4	1	0	0	$A \bar{B} \bar{C} = m_4$	$\bar{A} + B + C = M_4$
5	1	0	1	$A \bar{B} C = m_5$	$\bar{A} + B + \bar{C} = M_5$
6	1	1	0	$A B \bar{C} = m_6$	$\bar{A} + \bar{B} + C = M_6$
7	1	1	1	$A B C = m_7$	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = M_7$

Contoh

1. $f(A,B,C) = \Sigma m (0,4,5,7)$
 $= \bar{A} \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + A B C$
2. Tentukan Maxterm dari tabel kebenaran berikut ini

Desimal	A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Jawab:

Maxterm (lihat output bernilai 0)

$$f(A,B,C) = \Pi M (1,2,3,6)$$

$$= (A + B + \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$$

Latihan 5

1. Ubahlah ekspresi logika berikut ini ke dalam bentuk minterm.

$$f(A,B,C,D) = A B C D + \bar{A} B C D + \bar{A} \bar{B} C D + A B \bar{C} \bar{D}$$

2. Ubahlah ekspresi logika berikut ini ke dalam bentuk maxterm.

$$f(A,B,C) = (\bar{A} + B + \bar{C}).(A + \bar{B} + \bar{C}).(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

3. Tentukan persamaannya : (Variable : A,B,C)
 - a. $\Pi M (1,4,5,6)$
 - b. $\Sigma m (1,2,6,7)$

FUNGSI YANG TERDEFINISI TIDAK LENGKAP

- Yaitu fungsi yang tidak memberikan nilai pada kombinasi input tertentu.
- Contoh :

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	X
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	X
1	1	1	1

- Fungsi F tidak memberikan nilai pada kombinasi A B C : 0 0 1 dan 1 1 0.
- “x” = don’t care. Dapat bernilai 0 atau 1.
- Bentuk Minterm :
$$F = \sum m (0,3,7) + \sum d (1,6)$$
- Bentuk Maxterm :
$$F = \prod M (2,4,5) + \prod d (1,6)$$

Latihan 6

Sebuah jaringan dengan 4 buah input (A, B, C dan D) dinyatakan sebagai digit BCD 8421. Rancanglah jaringan yang menghasilkan output (Z) = 1, jika input dikonversi ke bilangan Desimal adalah bilangan yang habis dibagi 3. Asumsikan bahwa digit input yang valid hanya digit BCD (Desimal, 0 - 9).

- Buat Tabel Kebenaran
- Buat persamaan Z dalam minterm.